

条件数制約付き正定値行列近似問題に対する高速解法： 理論と応用

On the Positive Definite Matrix Approximation with Condition Number Constraint

H25海自24

派遣先 第4回 連続最適化国際会議

期 間 平成25年7月28日～平成25年8月2日 (6日間)

申請者 東京工業大学 大学院社会理工学研究科

博士後期課程3年 田 中 未 来

海外における研究活動状況

研究目的

本研究で考察した条件数制約付き正定値行列近似問題はデータの統計処理に応用を持つ最適化問題である。本研究の目的はこの問題を高速に解く方法を開発することである。本研究で提案した高速解法は、問題を扱いやすい問題に等価変換し、変換後の問題を高速に解くことで実現される。問題の等価性の証明では、あるクラスの行列ノルムに対する基本的な不等式を数学的に証明した。

海外における研究活動報告

本海外派遣では、The Fourth International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT 2013 第4回連続最適化国際会議)において On the positive definite matrix approximation with condition number constraint (条件数制約付き正定値行列近似問題について) という題目で口頭発表を行なった。この国際会議は Mathematical Optimization Society (国際数理論最適化学会) が主催するもので、連続最適化に限った会議では世界最大規模である。以下では、研究および発表の概要と国際会議の動向

について述べる。

1. 研究および発表の概要

本研究では、条件数制約付き正定値行列近似問題を高速に解く方法を提案した。条件数制約付き正定値行列近似問題とは、与えられた行列に最も近い正定値行列のうち条件数が与えられた定数以下であるような行列 (これはその行列が数値的に扱いやすいことを意味する) を求める問題である。この問題は、高次元小標本データからの分散共分散行列の推定や、分析者の知見を加味した分散共分散行列の補正など、データの統計解析における応用が期待できる。この問題は対称錐最適化問題と呼ばれるクラスの問題に等価変換できるので、理論的には既存の方法を適用することができる。しかしながら、大規模な問題を実際にこの方法で解くことは困難である。そこで本研究では、この問題を扱いやすい問題に等価変換した上で変換後の問題を効率よく解く方法を提案した。

提案手法は具体的には次のような手順で実現される：まず、行列同士の距離を測るためのノルムをユニタリ相似不変ノルムと呼ばれるノルムに限定することで行列を変数とする問題を行列の固有値を変数とする問題に等価変換

する。次に、ノルムをさらに Ky Fan の p - k ノルムと呼ばれるものに限定することで問題を最小固有値を変数とする問題に等価変換する。この問題は2分探索と呼ばれる基本的なアルゴリズムで解くことができる。

私たちは提案手法を実装していくつかの問題例を実際に解くことで提案手法が実用的にも優れたアルゴリズムであることを示した。具体的には、提案手法は小さな問題でも既存手法よりおよそ数十万倍高速であり、大きな問題ではそれ以上の差となることがわかった。

会議では提案手法に関する理論と提案手法を用いた計算実験の結果について発表を行った。私たちの研究の内容を聴衆にわかりやすく伝えることができたためか、発表後の質疑応答の時間では提案手法の拡張と応用の可能性について活発な議論が行なわれた。休み時間には質疑応答の際に議論に加わって下さった先生と連絡先を交換し、帰国したあとでお互いの論文を送り合った。今後は質疑応答の際に話題に上がった拡張と応用の可能性について考えていく予定である。

2. 国際会議の動向

今回の会議では、口頭発表では135件、ポスターセッションでは13件の発表が行なわれた。発表は理論的な研究に関するものが大部分を

占め、多くが非常に高度な発表であった。一方で応用に関する研究はポスターセッションと一部の口頭発表で見ることができたものの数としては少なく感じられた。数理最適化は応用数学の1つの分野であるため、応用も理論と同じかそれ以上に重要なはずなので、その点は少し残念であった。とはいえ、コーヒープレイクや昼食と夕食の時間が豊富に確保されており、多くの研究者と交流できたのは非常に良い経験となった。

この会議は3年に1回行なわれるもので、次回は東京で開催されることが決定している。次回は私も運営に関わることになると思われるので、今回以上に盛況となるように工夫を考えていきたい。

この派遣の研究成果等を発表した 著書、論文、報告書の書名・講演題目

[論文]

M. Tanaka and K. Nakata: Positive definite matrix approximation with condition number constraint, *Optimization Letters*, 2013 (Online First) .

[講演題目]

M. Tanaka and K. Nakata: On the positive definite matrix approximation problem with condition number constraint, *The Fourth International Conference on Continuous Optimization*, Wed.B.11, Universidade Nova de Lisboa, July 2013.